# *FAQ: Численные Методы, часть I*

# Системы линейных алгебраических уравнений: прямые методы

## 1. Связь метода Гаусса с разложением матрицы на множители.

См. [2], стр. 151; [3], стр. 43 (2.3); [6], стр. 17.

Рассмотрим простейший вариант метода Гаусса для решения СЛАУ вида **Ax=b**. Нетрудно показать, что в процессе прямого хода фактически происходит разложение матрицы А в произведение вида **A=LU**, где **L** - нижнетреугольная и **U** - верхнетреугольная матрицы. Такое разложение получило название *LU-разложения*.

Если найдено LU-разложение матрицы **А**, то дальнейшее решение системы **Ax=b** с произвольной правой частью **b** сводится к следующей схеме: 1) **Ly=b**, 2) **Ux=y**.

**Теорема 1.1**. Если все главные миноры матрицы А отличны от нуля, то ее LU-разложение единственно.

В современных программах, реализующих метод Гаусса, вычисления разбиваются на два основных этапа. Первый этап - это вычисление LU-разложения матрицы системы; на этом этапе производится основная масса вычислений - примерно (2/3)m3 операций. Второй этап - обработка правых частей и вычисление решений.

## 2. Обращение матрицы методом Гаусса-Жордана.

См. [6], стр. 30; [3], стр. 36 (2.1), [7], стр. 19.

*Задача обращения матрицы*. Будем искать для невырожденной матрицы **А** обратную **A-1=V**. Равенство **AV=E** равносильно совокупности равенств **Av­1=e1**, **Av­2=e2** , ... , **Av­n=en**, где **vi** и **ei** - столбцы матриц V и Е. Данная совокупность линейных уравнений с различными правыми частями решается произвольным методом.

*Метод Гаусса-Жордана* отличается от метода Гаусса в следующем. На i шаге прямого хода исключение переменной xi производится не только из уравнений i+1, i+2, ... , n, как в методе Гаусса, а из *всех* уравнений системы, кроме i-го. В результате прямого хода матрица системы приводится к единичному виду, и нет необходимости в обратном ходе.

## 3. Метод квадратного корня решения систем линейных уравнений.

Также известен как *метод Холецкого*;

См. [2], стр. 158; [3], стр. 96 (2.9), [6], стр. 34; [7], стр. 23.

Метод применяется для *симметрических положительно определенных* матриц **A**. Будем искать разложение вида **A=LLT**, где **L** - нижнетреугольная матрица.

Формулы для вычисления разложения Холецкого:

,  (j = i+1,...,n) (3.1)

Вычисление производится последовательно для i=1,2,..,n. Если найдено разложение Холецкого матрицы **А**, то дальнейшее решение системы **Ax=b** с произвольной правой частью **b** сводится к следующей схеме: 1) **Ly=b**, 2) **LTx=y**.

*Достоинства* метода: асимптотическая скорость, экономия памяти, гарантированная устойчивость. *Недостатки*: неуниверсальность, необходимость в операции вычисления квадратного корня.

# *FAQ: Численные Методы, часть II*

# Системы линейных алгебраических уравнений: итерационные методы

## 4. Примеры и канонический вид итерационных методов решения СЛАУ.

См. [2], стр. 175.

Итерационный метод называется *одношаговым*, если на каждой итерации требуется результат лишь одной предыдущей итерации. *Каноническая форма*:

. (4.1)

На каждой итерации в общем случае решается уравнение относительно **хn+1**. Если **B=E**, метод назывется *явным*:

. (4.2)

Если **B**,τ - постоянные величины, метод называется *стационарным*.

*Метод простой итерации*. Для проведения итераций система приводится к виду **x=Bx+c**. Выбирается начальное приближение **x0**, а далее проводятся вычисления по следующей схеме: **xn+1=Bxn+c**.

Представим матрицу **А** в виде **A=A1+D+A2**, где **D**=diag[a11,....,amm] - диагональ матрицы **А**, **A1** и **A2** - соответственно нижнетреугольная и верхнетреугольная подматрицы.

Простейший вариант методо простой итерации - *метод Якоби*. В этом методе производится исключение переменной xi из i-го уравнения исходной системы. Метод Якоби имеет следующую каноническую форму:

**D(xn+1 - xn) + Axn = f**. (4.3)

*Метод Зейделя* можно рассматривать как модификацию метода Якоби. Основная идея модификации состоит в том, что при вычислении очередного (k+1)-ого приближения к i-ой переменной используют уже найденные (k+1)-ые приближения к переменным 1,...,i-1.

Каноническая форма метода Зейделя:

**(D+A1)(xn+1 - xn) + Axn = f**, (4.4)

Пусть B1 и B2 - соотвественно нижняя и верхняя треугольные части матрицы B. Тогда расчетные формулы метода Зейделя можно записать в следующем виде: **xn+1=B1xn+1+B2xn +c.**

Обобщением метода Зейделя является *метод верхней релаксации*:

, (4.5)

где ω - заданный числовой параметр. При ω=1 - это метод Зейделя.

## 5. Теорема о сходимости двухслойных итерационных методов.

Погрешность метода (4.2) на n-й итерации характеризуется вектором невязки **zn=xn-x**, который, очевидно, удовлетворяет однородному уравнению

. (5.1)

**Теорема 5.1** (достаточное условие сходимости). Пусть **А** - симметрическая положительно определенная матрица и - положительно определенная матрица. Тогда при любом выборе начального приближения итерационная последовательность, определенная канонической формой (4.1), сходится к решению системы **Ах=b**.

## 6. Достаточные условия сходимости методов Якоби, Зейделя, релаксации.

См. [8, стр. 86].

Будем говорить, что А - матрица *с диагональным преобладанием*, если каждый диагональный элемент больше суммы абсолютных величин остальных элементов в соответствующей строке:

 (6.1)

Применим теорему 5.1 к конкретным итерационным методам:

**Утверждение 6.1**. Пусть А - симметричная положительная матрица с диагональным преобладанием. Тогда метод Якоби (4.3) сходится.

**Утверждение 6.2**. Пусть А - симметричная положительная матрица. Тогда метод верхней релаксации (4.5) сходится при 0<ω<2. В часности, метод Зейделя (ω=1) сходится.

## 7. Теорема об оценке скорости сходимости итерационных методов и следствия из этой теоремы.

См. [8, стр. 95].

Если для погрешности итерационного метода верна оценка

||**zn**|| ≤ qn ||**zo**||, (7.1)

то говорят, что метод сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q.

Будем рассматривать только стационарные итерационные методы вида

. (7.2)

Пусть для двух симметричных матриц ***А*** и ***В*** неравенство ***А*** ≥ ***В*** означает, что (***A****x*,*x*) ≥ (***B****x*,*x*) для любых векторов *x*. Для симметричной положительно определенной матрицы ***D*** введем обозначение .

**Теорема 7.1**. Пусть ***А*** и ***B*** - симметричные положительно определенные матрицы, для которых справедливы матричные неравенства

γ1B ≤ A ≤ γ2B, (7.3)

где γ2 > γ1 > 0. При значении параметра

 (7.4)

итерационный метод (7.2) сходится и для погрешности справедливы оценки

, (7.5)

, (7.6)

где

 (7.7).

**Утверждение 7.2** (следствие 1). Если А - симметричная положительно определенная матрица, а γ1 и γ2­ - соотвественно минимальное и максимальное собственные значения этой матрицы, то для метода простой итерации

, (7.8)

в котором параметр τ выбирается по формуле (7.4), справедлива оценка

, (7.9)

где величина знаменателя ρ определяется из (7.7).

**Утверждение 7.3** (следствие 2). Для симметричной матрицы А, минимальное и максимальное собственные значения равны соответственно γ1 и γ2­, и параметра τ, выбираемого по формуле (7.4), справедливо равенство

, (7.10)

где величина ρ определяется формулой (7.7).

## 8. Попеременно-треугольный итерационный метод. Реализация метода. Теорема о сходимости.

См. [8, стр. 394].

Пусть дано матричное уравнение вида

*Ax* = *f* , (8.1)

с симметричной положительно определеной матрицей *А* порядка *m*. Построим верхнетреугольную матрицу *R*[*rij*] следующим образом:

. (8.2)

Очевидно, матрицу А можно представить в виде суммы *A*=*R*+*R*\*.

*Попеременно-треугольный итерационный метод* относится к неявным стационарным методам вида (7.2), где матрица B имеет следующий конкретный вид (ω>0 - числовой параметр) :

*B* = (*E*+ω*R*\*) (*E*+ω*R*). (8.3)

Вычисления по этому методу сводятся к решению на каждой итерации двух систем с треугольными матрицами.

## 9. Теорема об оценке скорости сходимости попеременно-треугольного итерационного метода.

См. [8, стр. 397]

**Теорема 9.1**. В обозначениях пункта 8, предположим, что существуют положительные постоянные δ и Δ, при которых выполнены неравенства

*A* ≥ δ*E*, 4*RR\** ≤ Δ*A*. (9.1)

Введем также обозначения

. (9.2)

Если параметры ω и τ попеременно-треугольного итерационного метода выбираются следующим образом:

, (9.3)

то этот метод сходится, причем для погрешности справедлива оценка

, (9.4)

где

. (9.5)

# *FAQ: Численные Методы, часть III*

# Проблема собственных значений

## 10. Степенной метод решения частичной проблемы собственных значений.

См. [6], стр. 82.

*Степенной метод* применяется для нахождения максимального по модулю собственного значения матрицы. k-ое приближение к этому значению вычислется так:

 ,  (10.1)

**Теорема 10.1**. Пусть матрица **A** имеет полную систему из ортонормированных собственных векторов **ei** , которым соответсвуют собственные значения λ(i) , причем

|λ(1)| > |λ(2)| ≥ ... ≥ |λ(n)| (т.е. вектора занумерованы в порядке невозрастания модуля собственного значения, причем собственное значение λ(1) - не кратное).

Тогда итерационный процесс (10.1) сходится к собственному значению λ(1), причем

. (10.2).

При этом величины  сходятся к собственному вектору **e1**(c точностью до постоянного сомножителя, по модулю равного 1):

. (10.3)

## 11. Метод обратных итераций и обратных итераций со сдвигом решения частичной проблемы собственных значений.

Пусть найдено достаточно точное приближение λ' к собственному значению λ. В методе *обратных итераций* приближения к собственному вектору **e**, соответсвующему λ, определяют последовательным решением систем уравнений

**(A - λ'E) yk+1 = xk** (11.1)

с последующей нормировкой решения:

. (11.2)

В качестве начального приближения берут произвольный ненулевой вектор **x0**.

## 12. Приведение матрицы к верхней почти треугольной форме при помощи преобразования отражения.

См. [3, стр. 484 (11.5)], [6, стр. 70].

*Матрицами отражения* называются матрицы вида **V**(**ω) = Vω = E - 2ωωT**. Умножение на матрицу **Vω** называется *преобразованием Хаусхолдера* (или *отражением*); это преобразование можно интерпретировать как ортогональное отражение вектора относительно гиперплоскости, проходящей через начало координат и имеющей нормальный вектор **ω**.

**Утверждение 12.1**. Матрица отражения является самосопряженной.

**Утверждение 12.2**. Матрица отражения является унитарной.

**Утверждение 12.3**. Матрица отражения **Vω** имеет собственное значение (-1) кратности 1, которому отвечает собственный вектор **ω**; и собственное значение 1 кратности n-1, которому отвечает собственное подпространство, ортогональное к **ω**.

**Утверждение 12.4**. Пусть **е** - произвольный единичный вектор. Тогда для любого вектора **y** найдется единичный вектор **ω**, такой, что **Vωy = ||y|| e**.

Матрица **А**=[aij] называется *верхней почти треугольной* (или *верхней Гессенберговской*), если aij=0 при i>j+1.

**Теорема 12.5**. Всякая невырожденная матрица А может быть представлена в виде **A = QRQT**, где матрица **Q** - унитарная, а матрица **R** - верхняя почти треугольная.

**Алгоритм.** Обозначим **a1** = (a21,...,an1). Согласно утв. 12.4., найдется вектор **x1**, такой, что **V(x1) a1 = || a1|| e1**, где **е1**=(1,0,...,0). Положим

.

Умножим матрицу **А** на **U1** сначала слева, а потом справа: **A1** = **U1A U1**. В первом столбце матрицы **А** все элементы, начиная с 3-его, будут равны 0.

Аналогичный процесс повторяется для произвольного k=2,..,n-2.

## 13. Понятие о QR-алгоритме решения полной проблемы собственных значений. Сохранение верхней почти-треугольной формы при QR-алгоритме.

См. [3, стр. 486 (11.6)], [6], стр.123.

*QR-разложением* называется представление матрицы **А** в виде **A=QR**, где матрица **Q** - ортогональная, а матрица **R** - верхнетреугольная с положительными элементами на главной диагонали.

**Утверждение 13.1**. Для любой невырожденной вещественной матрицы А ее QR-разложение существует и единственно.

*QR-алгоритм* позволяет находить все собственные значения невырожденной матрицы **A**. Будем строить последовательность {**Ak**} матриц по следующим правилам: **A1=A**, а каждая последующая матрица **Ak+1** получается из **Ak** следующим образом:

1) строим QR-разложение матрицы **Ak**: **Ak=QkRk**,

2) вычисляем матрицу **Ak+1** как произведение матриц **Qk** и **Rk** в обратном порядке: **Ak+1= RkQk**.

**Теорема 13.2**.Пусть собственные значения матрицы А таковы, что

|λ(1)| > |λ(2)| > ... > |λ(n)|.

Тогда диагональные элементы матрицы **Ak** сходятся к собственным значениям матрицы А (порядок собственных значений может и нарушаться).

**Утверждение 13.3**. Если матрица А - верхняя почти треугольная, то все матрицы **Ak** , получаемые в QR-алгоритме - почти треугольные.

# *FAQ: Численные Методы, часть IV*

# Нелинейные уравнения

## 14. Метод простой итерации решения нелинейных уравнений. Сходимость метода.

См. [8, стр. 190]

Пусть задана функция f(x) действительного переменного. Требуется найти нули этой функции или корни уравнения

f(x) = 0. (14.1)

Метод *простой итерации* состоит в том, что уравнение (1) заменяется эквивалентным уравнением

x = s(x), (14.2)

задается начальное приближение x0 и итерации проводятся по правилу

xk+1=s(xk). (14.3)

Для сходимости процесса (14.3) большое значение имеет выбор функции s(x). Эту функцию можно задавать различными способами, ооднако обычно она берется в виде

s(x) = x+τ(x)f(x), (14.4)

причем функция τ(x) знакопостоянна на отрезке, где отыскивается корень. В частности, если τ(x)=τ=const, то получим *метод релаксации*.

**Теорема 14.1**. Если функция s(x) на отрезке Ur(a) удовлетворяет условию Липшица с константой q∈(0;1), причем

|s(a) - a| ≤ (1 - q)r, (14.5)

то уравнение (14.2) имеет на этом отрезке единственное решение x\* , и метод простой итерации (14.3) сходится к x\* при любом начальном приближении x0∈ Ur(a). Для погрешности справедлива оценка

|xk - x\*| ≤ qk| x0 - x\*|. (14.6)

**Утверждение 14.2**. Если на всем отрезке Ur(a) выполнено условие

|s’(x)| ≤q<1

и начальное приближение выбирается из этого отрезка, то решение (14.2) на этом отрезке единственно, метод (14.3) сходится и справедлива оценка (14.6).

## 15. Метод Ньютона решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений. Метод секущих.

См. [8, стр. 199].

В *методе Ньютона* (или *касательных*) итерации проводятся по следующему правилу:

. (15.1)

*Метод секущих* получается из метода Ньютона заменой производной на разделенную разность, вычисляемую по значениям xk и xk-1. В этом методе необходимо задать два начальных приближения.

Пусть F=(f1,...,fm) - система функций от m переменных. Будем решать нелинейную систему уравнений вида

F(x) = 0 (15.2).

Метод Ньютона для системы (15.2) можно записать в виде:

, (15.3)

где .

## 16. Сходимость метода Ньютона для решения нелинейных уравнений.

**Утверждение 16.1**. Пусть f’(x)≠0 в некоторой окрестности корня Ur(x\*), а вторая производная f(x) непрерывна в этой окрестности. Если

 и , (16.1)

причем

, (16.2)

то метод Ньютона сходится, причем для погрешности справедлива оценка

|xk+1 - x\*| ≤ q2k+1| x0 - x\*|. (16.3)

# *FAQ: Численные Методы, часть V*

# Интерполирование и приближение функций

## 17. Постановка задачи интерполирования. Интерполяционная формула Лагранжа. Погрешность формулы.

См. [8, стр. 127]

Задача *интерполирования* состоит в том, чтобы по значениям функции f(x) в некоторых точках отрезка восстановить ее значения в остальных точках этого отрезка.

Иногда возникает необходимость *аппроксимации* данной функции другими функциям, которые легче вычислить. В частности, рассматривается задача о наилучшем приближении в нормированном пространстве **Н**, когда заданную функцию f требуется заменить линейной комбинацией ϕ заданных элементов из **Н** так, чтобы отклонение ||f - ϕ|| было минимальным.

Пусть на отрезке [a; b] заданы *узлы интерполирования* xk (k=0,1...,n), в которых известны значения fk=f(xk). Задача интерполирования алгебраическими многочленами состоит в том, чтобы построить *интерполяционный многочлен* n-й степени

*Ln(x)=a0+a1x+...+anxn*, (17.1)

значения которого в точках xk совпадают со значениями fk функции f(x) в этих точках.

Интерполяционный многочлен в *форме Лагранжа* имеет вид

, (17.2)

где . (17.3)

Пусть *ω(x) = (x - x0) (x - x1)... (x - xn)*. Тогда выражение (17.3) для ck можно записать в виде



Разность rn(x) = f(x) - Ln(x) называется *погрешностью интерполирования* или *остаточным членом* интерполяционной формулы.

**Утверждение 17.1**. Предположим, что функция f(x) имеет на [a;b] непрерывные производные до (n+1)-го порядка включительно. Тогда для погрешности интерполирования rn справедлива следующая оценка:

 (17.4),

где .

## 18. Разделенные разности. Интерполяционная формула Ньютона.

*Разделенными разностями* первого порядка называются отношения вида

 (18.1).

Пусть известны две разделенные разности k-ого порядка *f(x0,x1,...,xk)* и *f(x1,x2,...,xk+1)*. Разделенная разность (k+1)-ого порядка определяется как

 (18.2)

*Интерполяционная формула Ньютона* является разностным аналогом формулы Тейлора:

*Pn(x) = f(x0) + (x - x0) f(x0,x1) + (x - x0)( x - x1) f(x0,x1,x2) + ...*

*+ (x - x0) (x - x1)...(x - xn-1) f(x0,x1,...,xn)*. (18.3)

## 19. Понятие об интерполировании с кратными узлами. Построение полинома H3(x). Оценка погрешности H3(x).

См. [8, стр. 214].

Более общая постановка задачи интерполирования состоит в следующем. В узлах *xk∈[a;b]* *(k=0,1,...,m)*, среди которых нет совпадающих узлов, заданы значения функции *f(xk)* и ее производных *f(i)(xk)* до порядка *(Nk - 1)* включительно. Всего известно *N=N0+ N1+...+ Nn*величин. Требуется построить алгебраический многочлен *Hn(x)* степени *n=N-1*, для которого

 (*k* = 0...n, *i* = 0...Nk-1). (19.1)

Многочлен *Hn(x)*, удовлетворяю называется *многочленом Эрмита* для функции *f(x)*.

**Утверждение 19.1**. Многочлен Эрмита существует и единственен.

Построим полином третьей степени H3(x) по значениям функции f(x) в трех точках x0 , x1 , x2 и по значению производной в точке x1. Будем искать этот многочлен в виде

*H3(x)=c0(x)f0+c1(x)f1+ c2(x)f2+b(x)f’1*, (19.2)

где *c0(x)*,*c1(x)*,*c2(x),b(x)*РHП - многочлены третьей степени.

Для того, чтобы *H3(x)* был многочленом Эрмита, достаточно потребовать

*с0(x0)=1*, *с0(x1)=0, с0(x2)=0, с’0(x1)=0* (19.3)

*с1(x0)=0*, *с1(x1)=1, с1(x2)=0, с’1(x1)=0* (19.4)

*с2(x0)=0*, *с2(x1)=0, с2(x2)=1, с’2(x1)=0* (19.5)

*b(x0)=0*, *b(x1)=0, b(x2)=0, b’(x1)=1* (19.6)

Из условий (19.3-6) можно получить следующие выражения для многочленов *c0(x)*,*c1(x)*,*c2(x),b(x)*:

 (19.7)

 (19.8)

 (19.9)

 (19.10)

**Утверждение 19.2**. Пусть *ω(x) = (x - x0)(x - x1)2(x - x2)*. Погрешность приближения функции f полиномом H3(x) удовлетворяет следующей оценке:

 (19.11)

где . (19.20)

## 20. Применение H3(x) для получения оценки погрешности квадратурной формулы Симпсона.

См. [8, стр. 166].

Формула численного интегрирования на одном элементарном отрезке [*хi*;*xi+1*] длины *h* имеет вид

. (20.1)

Представим *f(x)* в виде *f(x)=H3(x)+r(x)*, где *H3(x)* - многочлен Эрмита, а *r(x)* - погрешность интерполирования. Поскольку формула Симпсона точна для любого многочлена третьей степени, то погрешность формулы (20.1) равна

. (20.2)

Оценка для величины (20.2) следует из оценки (19.11) для *r(x)*:

. (20.3)

Погрешность составной формулы Симпсона для интегрирования по отрезку [a;b] оценивается так:

. (20.4)

## 21. Наилучшее среднеквадратичное приближение функций. Существование и единственность.

См. [8, стр. 152], [5, стр. 130], [2, стр. 343].

Пусть значения функции *f(x)* и базисных функций *gj(x)* (*j=0,1...,n*) известны в точках *xk* (*k=0,1,...m*). Рассмотрим приближения функции *f(x)* обобщенными многочленами вида:

. (21.1)

Вектор погрешностей *r=(r0,r1,...rm)* составляется из величин погрешностей приближения (21.1) в точках xk:

*rk = g(xk) - f(xk)* (21.2).

Для вектора *r* можно ввести ту или иную норму, например евклидову (среднеквадратическую). *Задача о наилучшем приближении* формулируется следующим образом: найти набор коэффициентов *cj*, минимизирующий норму вектора *r*. Данная задача имеет смысл только при m > n. Если m=n, то независимо от выбора нормы, данная задача сводится к задаче интерполирования. В общем случае, задача сводится к задаче минимизации неотрицательного функционала ||*r*||, зависящего от *n* переменных *c1,c2,...,cn*; таким образом, существование решения гарантировано.

**Утверждение 21.1**. Если полиномы *g(x)* есть алгебраические полиномы *n*-й степени, т.е. если *gj(x)=xj*, то решение задачи о наилучшем приближении единственно.

## FAQ: Численные Методы, часть VI

## Разностные схемы

## 22. Явная разностная схема для первой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Сходимость, точность.

См. [8, стр. 272]

Будем рассматривать первую краевую задачу для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами в области ***G***={0<*x*<1,0<*t*≤*T*}:

, (22.1)

со следующими начальным и граничными условиями:

*u*(*x*,0) = *u*0(*x*) , (22.2)

*u*(0,*t*) = μ1(*t*), u(1,*t*) = μ2(*t*). (22.3)

Определим равномерную сетку ω*h*τс шагом *h* по пространственной перменной и шагом τ по временной переменной. Для сеточной функции *y*(*x*,*t*) введем обозначение *yin*=*y*(*xi*,*tn*), где *i* = 0...*N* (*hN* = 1), *n* = 0...*K*  (*K*τ=*T*). Правую часть заменим приближенно сеточной функцией ϕin.

*Явная разностная схема* для уравнения (22.1) будет выглядеть следующим образом:

 . (22.4)

Уравнение (22.4) решается по слоям, соответствующим моментам времени. Если решение найдено на слое *n*, то решение на слое *n*+1 вычисляется по явной формуле.

**Утверждение 22.1**. Схема (22.4) устойчива только при условии

. (22.5)

## 23. Чисто неявная схема для первой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Сходимость, точность.

*Чисто неявной схемой* для уравнения (22.1) называется схема вида

 . (23.1)

Данная схема также решается послойно; и на каждом (*n*+1)-ом слое приводит к трехдиагональной системе с количеством неизвестных (*N* - 1).

**Утверждение 23.1**. Схема (23.1) абсолютно устойчива.

**Утверждение 23.2**. Схема (23.1) имеет первый порядок аппроксимации как по τ и второй порядок а по *h*, если только ϕ*in* = *f*(*xi*,*tn+1*)+*O*(τ+*h*2).

## 24. Симметричная разностная схема . Сходимость, точность.

*Шеститочечной симметричной схемой* для уравнения (22.1) называется схема вида

 . (24.1)

Данную схему также можно решать методом прогонки.

**Утверждение 24.2**. Схема (24.1) имеет второй порядок аппроксимации как по τ, так и по *h*, если только ϕ*in* = *f*(*xi*,*tn*+0.5τ)+*O*(τ2+*h*2).

## 25.Основные понятия теории разностных схем: аппроксимация, сходимость, устойчивость.

См. [1, стр. 60], [8, cтр. 286].

Для того, чтобы написать разностную схему, приближенно описывающую данное дифференциальное уравнение, нужно совершить следующие три шага:

1. Заменить область непрерывного изменения аргумента областью его дискретного изменения (сеткой).

2. Заменить дифференциальный оператор некоторым разностным оператором.

3. Сформулировать разностный аналог для краевых условий и для начальных данных.

*Сетка* - это некототорое конечное множество точек (*узлов* сетки), находящихся в области изменения аргумента. Функция, определенная в узлах сетки, называется *сеточной функцией*.

В простейшем случае определяется *равномерная сетка*, где узлы отстоят друг от друга на фиксированны шаг *h* (в двухмерном случае возможны различные значения шагов *h* и τ по пространственной и временной координатам). Через ω*h* будем обозначать равномерную сетку с шагом *h*, через ***B****h* - пространство функций, определенных на такой сетке. Через ***B***0 обозначим пространство функций непрерывного аргумента. Отображение *ph*вида ***B***0→***B****h*, служащее для сравнения сеточных функций с обычными, называется *оператором проектирования*. В пространствах ***B***0 и ***B****h* выбираются какие-либо нормы (обычно, индуцированные скалярным произведением). Эти нормы называются *согласованными*, если для любой функци *u*∈***B***0 выполняется условие

. (25.1)

**Утверждение 25.1**. Требование согласованности норм обеспечивает единственность предела сеточных функций при |*h*|→0.

Пусть исходная дифференциальная задача имеет вид

*Lu(x) = f(x)*, (*x* ∈ ***G*** ⊆ ***R****m*), (25.2)

а соответствующая ей *разностная задача* на равномерной сетке имеет вид

*Lhyh(x)* = ϕ*h(x)*. (*x* ∈ ω*h*), (25.3)

где ϕ*h(x)*= *phf(x)*, а *Lh* - разностный аналог оператора *L*.

Пусть *u(x)* и *yh(x)* - соответственно решения дифференциальной и разностной задач. Сеточная функция

*zh*(*x*) = *yh(x)* - *phu*(*x*) (25.4)

называется *погрешностью* разностной схемы (25.3).

Очевидно, что погрешность zh(x) удовлетворяет уравнению

*Lh*(*x*)*zh*(*x*) = ψ*h*(*x*) , (25.5)

где ψ*h*(*x*) = ϕ*h(x)* - *Lhuh*(*x*). Сеточная функция ψ*h*(*x*) называется *погрешностью аппроксимации разностной задачи на решении исходной дифференциальной задачи*. Эту погрешность можно представить в виде

ψ*h*(*x*) = ψ*h,1*(*x*)+ψ*h,2*(*x*), (25.6)

где величины

ψ*h,1*(*x*) = (*Lu*)*h*(*x*) - *Lhuh*(*x*) и ψ*h,2*(*x*) = ϕ*h(x) - fh(x)* (25.7)

называются соответсвенно *погрешностью аппроксимации разностного оператора* и *погрешностью аппроксимации правой части*.

Говорят, что разностная задача (25.3) *аппроксимирует* исходную задачу (25.2), если ||ψ*h*(*x*)||*h*→0 при |*h*|→0. Говорят, что схема (25.3) имеет *k-й порядок аппроксимации*, если существуют положительные постоянные *k* и *M1* (не зависящие от *h*), такие, что

||ψ*h*||*h* ≤ *M1*|*h*|*k*. (25.8)

Разностная схема (25.3) называется *устойчивой* (безотносительно к аппроксимации уравнения (25.2)), если существует постоянная M2 (не зависящая от *h*), такая, что

||*yh*||*h* ≤ *M2*||ϕ*h*||. (25.9)

Схема называется *условно устойчивой*, если она устойчива только при определенном ограничении на соотношении шагов по *x* и *t*.

Разностная схема называется *корректной*, если 1) ее решение *yh* существует и единственно и 2) она устойчива.

Говорят, что решение разностной задачи (25.3) *сходится* к решению дифференциальной задачи, если ||*yh*­ - *phu*||*h­*→0 при |*h*|→0.

Разностная схема имеет *k-й порядок точности*, если если существуют положительные постоянные *k* и *M3* (не зависящие от *h*), такие, что

||*yh*­ - *phu*||*h­* ≤ *M3*|*h*|*k*. (25.10)

**Теорема 25.2**. Пусть дифференциальная задача поставлена корректно, разностная схема является корректной и аппроксимирует исходную задачу. Тогда решение разностной задачи сходится к решению исходной задачи, причем порядок точности совпадает с порядком аппроксимации.

## 26. Сходимость разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

См. [1, стр. 211], [8, стр. 291].

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона: требуется найти непрерывную в ***G’***=***G***+**Г** функцию *u*(*x*1,*x*2), удовлетворяющую в области ***G*** уравнению

, (26.1)

а на ее границе **Г** условию

*u*(*x*) = μ(*x*). (26.2)

Предположим, что ***G*** - прямоугольник вида {0<*x*1<*l*1, 0<*x*2<*l*2}, а функции *f* и μ таковы, что решение задачи (26.1,2) существует, единственно и является гладкой функцией.

Введем в ***G’*** прямоугольную сетку ω( *h*1,*h*2) с шагами *h*1 и *h*2, такими, что *l*1=*h*1*N*1 и *l*2=*h*2*N*2. Введем обозначения *xi*1 = *ih*1 , *xj*2 = *jh*2, *yij* = *y*(*xi*1, *xj*2).

Разностную схему для уравнения (26.1) удобно записать в *каноническом виде*, разрешенном относительно *yij*:

. (26.3)

**Теорема 26.1**. Если решение дифференциальной задачи Дирихле имеет в замкнутой области ***G’*** непрерывные проивзодные до 4-го порядка включительно, то разностная схема (26.3) сходится и имеет второй порядок точности.

## 27. Методы решения сеточных уравнений разностной задачи Дирихле.

См. [1, стр. 516],[8, стр. 337, стр. 379].

Сеточное уравнение (26.3) приводит к сильно разреженной, симметричной и плохо обусловленной системе линейных уравнений. Для его решения можно использовать самые различные методы:

1. Прямые методы (метод Гаусса).

2. Простейшие явные итерационные методы (Якоби, Зейделя).

3. Метод верхней релаксации со специально подобранными параметрами.

4. Чебышевский метод.

5. Попеременно-треугольные итерационные методы.

6. Метод матричной прогонки.

7. Метод, основанный на быстром преобразовании Фурье.

## FAQ: Численные Методы, часть VII

## Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем

## 28. Примеры численных методов решения задачи Коши для уравнения . Погрешность аппроксимации 2-х этапного метода Рунге-Кутта.

См. [8, стр. 214].

Будем рассматривать задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

, t > 0, (28.1)

с начальным условием *u*(0) = *u*0.

Метод Эйлера, соответствующий разностной схеме

, (28.2)

является явным и имеет только первый порядок аппроксимации.

Метод, основанный на *симметричной схеме*:

, (28.3)

является неявным (т.к. приводит к решению нелинейного уравнения) и имеет второй порядок точности.

*Метод Рунге-Кутта* второго порядка является явным и состоит в следующем. Пусть значение сеточной функции вычислено в точке *n*. Вычислим величины

*k*1 = *f*(*tn*,*yn*) , *k*2 = *f*(*tn*+0.5τ, *yn*+0.5τ*k*1), (28.4)

а затем найдем yn+1 из уравнения

 (28.5).

**Утверждение 28.1**. Метод Рунге-Кутта (28.4,5) имеет второй порядок аппроксимации.

## 29. Общая формулировка m-этапного метода Рунге-Кутта. Оценка точности 2-х этапного метода Рунге-Кутта.

См. [8, стр. 218].

Явный *m-этапный метод Рунге-Кутта* состоит в следующем. Пусть значение *yn*= *y*(*tn*) уже известно. Задаются числовые коэффициенты *ai*, *bij*, σ*i* и последовательно вычисляются величины

*k*1 = *f*(*tn* ,*yn*),

*k*2 = *f*(*tn*+*a*2τ, *yn*+*b*21τ*k*1),

*k*3 = *f*(*tn*+*a*3τ, *yn*+*b*31τ*k*1+ *b*32τ*k*2),

...

*km* = *f*(*tn*+*a*mτ, *yn*+*b*m1τ*k*1+ *b*m2τ*k*2+...+ *b*m,m-1τ*k*m-1). (29.1)

Затем из формулы

 (29.2).

находится значение *yn+1*= *y*(*tn+1*).

Коэффициенты *ai*, *bij*, σ*i* выбираются из соображений точности. Для того, чтобы уравнение (29.2) аппроксимировало исходное уравнение (28.1), необходимо потребовать

. (29.3)

При *m*=1 получается метод Эйлера (28.2). При *m*=2 получаем семейство методов

*k*1 = *f*(*tn* ,*yn*),

*k*2 = *f*(*tn* + *a*2τ, *yn* + *b*21τ*k*1),

*yn*+1 = *yn* + τ(σ1*k*2 + σ2*k*2). (29.4)

В частности, при σ1*=*0, σ2=1, *a*2 = *b*21 = 0.5, получим метод (28.5).

**Утверждение 29.1**. При выполнении условия (29.3) методы (29.4) имеют первый порядок аппроксимации, а если дополнительно потребовать σ1*a*2 + σ2*a*2 = 0.5, то получим методы второго порядка аппроксимации.

**Утверждение 29.2**. Если данный метод Рунге-Кутта аппроксимируют исходное уравнение, то он сходится, причем порядок его точности совпадает с порядком аппроксимации. Таким образом, двухэтапный метод Рунге-Кутта (28.5) имеет второй порядок точности.

## 30. Многошаговые разностные методы. Погрешность аппроксимации. Понятие устойчивости.

См. [8, стр. 230].

*Линейным m-шаговым методом* для решения задачи Коши (28.1) называется система разностных уравнений

, (30.1)

где a*­k* и *bk ­*- числовые коэффициенты, не зависящие от *n*. Так как эти коэффициенты определены с точностью до постоянного множителя, потребуем дополнительно, чтобы

. (30.2)

Расчет по схеме (30.1) начинается с n=m. Значение y0 определено начальным условием, а значения y1, ..., ym-1 можно получить, например, с помощью метода Рунге-Кутта (28.5). Метод (30.1) называется *явным*, если *b*0=0, т.е. величина yn явным образом выражается через величины yn-m,...,yn-1. В противном случае этот метод называется неявным, и на каждом шаге приходится решать нелинейное уравнение.

Частным случаем семейства методов (30.1) являются методы Адамса, где производная аппроксимируется только по двум точкам:

, (30.3)

**Утверждение 30.1**. Порядок аппроксимации линейных *m*-шаговых методов (30.1) не может превосходить 2*m*.

## 31. Жёсткие системы дифференциальных уравнений.

См. [8, стр. 249].

Пусть *u*=(*u*1,*u*2,...,*u*m) - вектор из *m* неизвестных функций от времени, *А* - квадратная матрица порядка *m*, λ*k* - ее собственные числа. Система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

 (31.1)

называется *жесткой* с *числом жесткости s*, если

1) система асимптотически устойчива по Ляпунову, т.е. Re λ*k*<0 для всех *k*.

2) отношение

 (31.2)

достаточно велико.

Решение жесткой системы содержит как медленно убывающие, так и быстро убывающие составляюшие. Начиная с некоторого момента t, решение системы почти полностью определяется медленнно убывающей составляющей; однако при использовании явных разностных методов быстро убывающая составляющая отрицательно влияет на устойчивость, что вынуждает брать шаг интегрирования τ слишком мелким. Выход из этой ситуации найден в применении неявных абсолютно устойчивых разностных методов.

Свойства различных разностных методов решения жестких систем обычно моделируют на основе уравнения

, (31.3)

где величина λ пробегает все собственные значения матрицы *А*.

*Областью устойчивости* разностного метода называется множество *M* всех точек комплексной плоскости μ=τλ таких, что метод устойчив при данных значениях τ и λ. Разностный метод будем называть *А*-устойчивым, если область его устойчивости содержит левую полуплоскость {Re μ > 0}. Разностный метод называется *А*(α)-устойчивым, если область его устойчивости содержит угол

|arg(-μ)|<α.

**Утверждение 31.1**. Среди явных линейных многошаговых методов не существует *А*-устойчивых. Среди неявных линейных многошаговых методов не существует *А*-устойчивых порядка точности выше второго.

## 32. Примеры разностных схем для интегрирования жёстких систем дифференциальных уравнений.

См. [8, стр. 255].

*Чисто неявные* линейные методы имеют следующий общий вид:

, (32.2)

где параметры *ak* подбираются из соображений нужного порядка аппроксимации.

При *m*=1 получаем *неявный метод Эйлера*.

При m=2 и m=3 получаем методы соответственно второго и третьего порядка точности:

, (32.3)

. (32.4)

**Утверждение 32.1**. Метод (32.3) является А-устойчивым.